Fiche de Révisions

Classe 1S à TS

Les exercices de cette feuille sont à travailler pendant les vacances. Vous serez interrogés sur des exercices similaires à la rentrée.

<u>Exercice 1 :</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Étudier le sens de variation de *f*.

2. Dresser le tableau de variations de *f*.

3. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout $x\neq 1$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

4. Déterminer l'extremum de f sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

5. Trouver une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ de *f* au point d'abscisse 0.

<u>Exercice 2 :</u> Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_1=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{1}{5}$.

1. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n=u_n-\dfrac{2}{5}$ est une suite géométrique.

2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de *n*. Calculer alors la valeur exacte de u_4.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et calculer sa limite.

4. On cherche à déterminer le plus petit entier naturel p à partir duquel $u_n\leq 0{,}401$. Pour cela nous allons utiliser un algorithme.

```
U ⟵ 1/2
n ⟵ 1
Tant que …………… faire
  U ⟵……………….
  n ⟵ ……………..
Fin Tant que
```

a) Compléter l'algorithme précédent afin qu'il détermine la valeur de *p*.

b) Recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant (on arrondira à 10^{-4} près)

n	1				
U	$\dfrac{1}{2}$				
Condition …………	VRAIE				

c) En déduire la valeur de *p*.

5. Exprimer la somme $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ en fonction de *n*.

Exercice 3 :

Partie A

Une enquête révèle que dans un lycée, 67 % des élèves jouent régulièrement aux jeux vidéo.
On sait de plus que 57 % des élèves du lycée sont des filles et que, parmi elles, 49 % jouent régulièrement aux jeux vidéo.
On choisit au hasard un élève du lycée.
On note : J l'évènement: « l'élève joue régulièrement aux jeux vidéo », et F l'évènement : « l'élève est une fille ».

1. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'élève soit une fille qui joue régulièrement aux jeux vidéo.
3. Montrer que la probabilité que l'élève soit un garçon qui joue régulièrement aux jeux vidéo est égale à 0,3907.

Partie B

On interroge au hasard 50 élèves. Les élèves de ce lycée est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 élèves.
On note X la variable aléatoire qui représente le nombre d'élèves qui jouent régulièrement aux jeux vidéo.
On donnera les résultats à 10^{-3} près.
1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser les paramètres.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir :
  a) exactement 33 élèves qui jouent aux jeux vidéo.
  b) au plus 25 élèves qui jouent aux jeux vidéo.
  c) au moins 32 élèves qui jouent aux jeux vidéo.

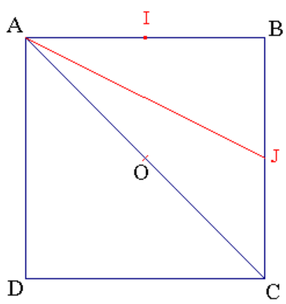
Exercice 4 : *Cet exercice est composé de questions simples et indépendantes visant à tester vos connaissances sur le produit scalaire.*

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $x^2+y^2+x-2y=0$.

2. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(2\,;-3)$ et tangent à la droite d'équation $x-y+1=0$.

3. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB=4$, $AD=3$ et $AC=6$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

4. Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté a et de centre O. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. On note α la mesure de l'angle $\widehat{JAC}$.



Donner la valeur exacte de $\cos\alpha$ puis donner une valeur approchée de α à 1 degré près.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1 :

1. $f : x \to \dfrac{x^2+3}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ de dérivée : $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)$ admet le signe de x^2-2x-3 car $(x-1)^2>0$. x^2-2x-3 est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines -1 et 3.

f est donc croissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[3;+\infty[$, et f est décroissante sur $[-1;1[$ et sur $]1;3]$.

2. $f(-1) = \dfrac{4}{-2} = -2$ et $f(3) = \dfrac{12}{2} = 6$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	-2	↘	‖	↘	6	↗	

3. Après réduction au même dénominateur et identification, on a pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x+1+\dfrac{4}{x-1}$.

4. D'après le tableau de variations, sur $]-\infty;1[$ la dérivée s'annule et change de signe du plus au moins en $x=-1$.

Par conséquent, sur l'intervalle $]-\infty;1[$, f admet -2 pour maximum atteint en $x=-1$.

5. $\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow \mathcal{T}_0 : y = -3x-3$.

Exercice 2 :

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{2}\left(u_n - \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{1}{2}v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}$.

2. D'après la question précédente, on a : $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Or $v_n = u_n - \dfrac{2}{5}$ donc $u_n = v_n + \dfrac{2}{5}$ soit $u_n = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{5}$.

Ainsi, $u_4 = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4-1} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{8} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{80} + \dfrac{32}{80} = \dfrac{33}{80}$.

3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} + \dfrac{2}{5} - \left[\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{5}\right] = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} - \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}-1\right) = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{20}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

De manière évidente $u_{n+1} - u_n < 0$. Ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{5}$.

4. a) On obtient l'algorithme suivant :

$U \longleftarrow \frac{1}{2}$

$n \longleftarrow 1$

Tant que $\boldsymbol{U > 0{,}401}$ faire

  $U \longleftarrow \boldsymbol{\frac{1}{2}U + \frac{1}{5}}$

  $n \longleftarrow \boldsymbol{n+1}$

Fin Tant que

b) On obtient le tableau suivant

n	1	2	3	4	5	6	7	8
U	$\frac{1}{2}$	0,45	0,425	0,4125	0,4063	0,4031	0,4016	0,4008
Condition $U > 0{,}401$	VRAIE	VRAIE	VRAIE	VRAIE	VRAIE	VRAIE	VRAIE	FAUSSE

c) D'après le tableau précédent, on a $p = 8$.

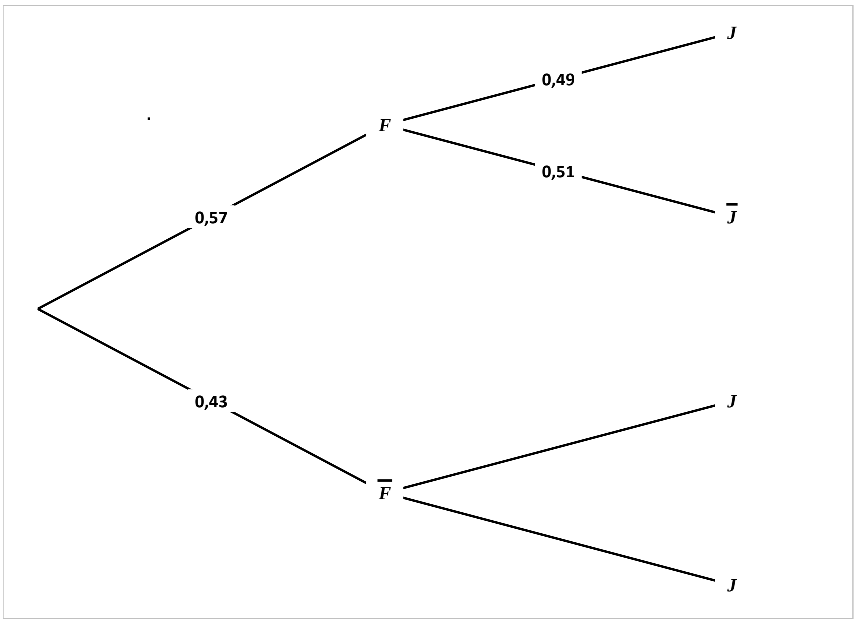
5. $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = v_1 + \frac{2}{5} + v_2 + \frac{2}{5} + ... + v_n + \frac{2}{5} = v_1 + v_2 + ... + v_n + \frac{2}{5}n = \frac{1}{10} \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{2}{5}n$.

Donc $S_n = \frac{1}{5}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \frac{2}{5}n$.

<u>Exercice 3 :</u>

Partie A

1. On obtient l'arbre de probabilité suivant



2. $P(F \cap C) = 0,49 \times 0,57 = 0,2793$.

La probabilité que l'élève soit une fille qui joue régulièrement aux jeux vidéo est égale à 0,2793.

3. F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc :

$$P(J) = P(F \cap J) + P(\overline{F} \cap J) \Leftrightarrow P(\overline{F} \cap J) = P(J) - P(F \cap J)$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{F} \cap J) = 0,67 - 0,2793$$

soit $P(\overline{F} \cap J) = 0,3907$.

Partie B

1. On est en présence d'une épreuve de Bernoulli (l'élève joue aux jeux vidéo ou pas) que l'on répète 50 fois de manière identique et indépendante.
On obtient un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire X qui représente le nombre d'élèves qui jouent aux jeu vidéo suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,67$.

2. On cherche $P(X = 33)$.

$$P(X = 33) = \binom{50}{33} \times 0,67^{33} \times (1 - 0,67)^{17}$$ soit $P(X = 33) \approx 0,117$.

3. On cherche $P(X \leqslant 25)$.

À laide de la calculatrice, $P(X \leqslant 25) \approx 0,009$.

4. On cherche $P(X \geqslant 32)$.

$$P(X \geqslant 32) = 1 - P(X < 32) = 1 - P(X \leqslant 31)$$

À laide de la calculatrice, $P(X \geqslant 32) \approx 0,73$.

__Exercice 4 :__

1. $x^2 + y^2 + x - 2y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$.

Donc M appartient au cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}\,;1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. Déterminons tout d'abord une équation de la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à la droite Δ d'équation $x - y + 1 = 0$.

Or un vecteur normal de $\mathcal{D}$ est un vecteur directeur de Δ, ainsi $\vec{n}_{\mathcal{D}}\,(1\,;1)$.

$$M(x\,;y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \vec{n}_{\mathcal{D}} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{\Omega M}} \times x_{\vec{n}_{\mathcal{D}}} + y_{\overrightarrow{\Omega M}} \times y_{\vec{n}_{\mathcal{D}}} = 0 \Leftrightarrow (x-2) \times 1 + (y+3) \times 1 = 0.$$

Par conséquent, $\mathcal{D}$ a pour équation : $x + y + 1 = 0$.

Déterminons maintenant les coordonnées du point d'intersection, noté *I*, des droites $\mathcal{D}$ et Δ.

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$$ Donc $I(-2\,;-1)$.

Le cercle $\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre Ω est de rayon ΩI.

Or $\Omega I=\sqrt{\left(x_I-x_\Omega\right)^2+\left(y_I-y_\Omega\right)^2}=\sqrt{\left(-2-2\right)^2+\left(-1+3\right)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$.

Ainsi, l'équation de $\mathcal{C}$ est : $\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2=20$.

3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-AD^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(16+36-9\right)=\dfrac{43}{2}$.

4. $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}^2+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BJ})}_{=0}+\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}^2=a^2+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{3a^2}{2}$.

De plus, on a $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AC}=\mathrm{AJ}\times\mathrm{AC}\times\cos\widehat{JAC}$. Or on sait que $\mathrm{AC}=a\sqrt{2}$ car la diagonale d'un carré est égale au produit de la longueur d'un côté par $\sqrt{2}$. Calculons maintenant la longueur AJ.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABJ, on a :

$\mathrm{AJ}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BJ}^2=a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=a^2+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{5a^2}{4}$ donc $\mathrm{AJ}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

On obtient donc : $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\times a\sqrt{2}\times\cos\widehat{JAC}=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{2}\times\cos\widehat{JAC}$

De ces deux expressions de $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AC}$, on en déduit que : $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{2}\times\cos\widehat{JAC}=\dfrac{3a^2}{2}$ soit $\cos\widehat{JAC}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Soit encore $\cos\widehat{JAC}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, d'où $\widehat{JAC}\approx 18°$.